JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OLINDE RODRIGUES

Démonstration élémentaire et purement algébrique du développement d'un binome élevé à une puissance négative ou fractionnaire

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 550-551.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__550_0>

Démonstration élémentaire et purement algébrique du développement d'un binome élevé à une puissance négative ou fractionnaire;

Par M. Olinde RODRIGUES.

---

x, y étant deux nombres entiers et positifs, on a rigoureusement, en s'arrêtant aux termes du degré p,

$$(1+a)^x = 1 + xa + (x,\ 2)\, a^2 + (x,\ 3) a^3 + \ldots (x,\ p)\, a^p, \quad (1)$$
$$(1+a)^y = 1 + ya + (y,\ 2)\, a^2 + (y,\ 3)\, a^3 + \ldots (y,\ p) a^p, \quad (2)$$
$$(1+a)^{x+y} = 1 + (x+y)a + (x+y, 2)a^2 + (x+y, 3)a^3 \ldots + (x+y, p)a^p, (3)$$

la notation (x, p), désignant l'expression $\frac{x . x-1 . x-2 \ldots x-p+1}{1.2.3 \ldots p}$.

Il s'ensuit que les $p+1$ premiers termes du développement de $(1+a)^{x+y}$ donnent rigoureusement et identiquement les $(p+1)$ premiers termes du produit des deux polynomes (1) et (2), identité qui se trouve avoir lieu pour toutes les valeurs entières de x et y, entre deux fonctions entières rationnelles de ces variables, du degré p. Cette identité subsiste donc absolument pour toutes les valeurs de x et de y, en vertu d'un théorème connu. La division du polynome (3) par l'un des polynomes (1) ou (2) donnera donc rigoureusement pour quotient l'autre de ces polynomes jusqu'aux termes du degré p en a inclusivement. Soit donc $x+y=0$, on aura.

$$\frac{1}{1+xa+(x,2)a^2+(x,3)a^3 \ldots + (x,\ p)a^p} = 1 - xa + (-x, 2)\, a^2 \ldots + (-x,\ p)\, a^p,$$

et prenant p indéfiniment plus grand que x, on aura aussi loin qu'on voudra pousser la division

$$\frac{1}{1+xa+(x,\ 2)\, a^2 + \ldots + a^x} = (1+a)^{-x} = 1 - xa + (-x,\ 2)\, a^2 \ldots \text{ etc.}$$

Telle est la loi du développement de $(1+a)^{-x}$, résultant de la division algébrique, indiquée par cette notation, de l'unité par le binome entier $(1+a)^x$.

Cette loi est la même que celle du développement de la puissance entière et positive.

Passons au cas de l'exposant fractionnaire : soient x, y, deux nombres entiers dont l'un est de plus positif ; on aura aux termes de l'ordre a^p près,

$$(1+a)^{xy} = [1 + xa + (x, 2)a^2 + (x, 3)a^3 \ldots + (x, p)a^p]^y, \quad (4)$$

et par le binome

$$(1+a)^{xy} = 1 + xy.a + (xy, 2)a^2 + (xy, 3)a^3 \ldots + (xy, p)a^p : \quad (5)$$

les $\overline{p+1}$ premiers termes de la puissance y du polynome $1 + xa + (x, 2)a^2 \ldots + (x, p)a^p$ seront donc identiques avec le polynome (5), pour toutes les valeurs entières de x et de y, et par les mêmes raisons que ci-dessus pour toutes les valeurs possibles de x et de y.

Soit donc $xy = z$, z entier, on aura identiquement jusqu'aux termes de l'ordre a^p,

$$\sqrt[y]{1 + za + (z, 2)a^2 + \ldots (z, p)a^p} = 1 + \frac{z}{y}a + \left(\frac{z}{y}, 2\right)a^2 + \ldots \left(\frac{z}{y}, p\right)a^p,$$

et comme p est aussi grand que l'on veut, on a aussi loin qu'on pousse l'extraction de la racine

$$(1+a)^{\frac{z}{y}} = 1 + \frac{z}{y}a + \left(\frac{z}{y}, 2\right)a^2 + \left(\frac{z}{y}, 3\right)a^3 + \text{etc.}$$

La loi algorithmique du développement du binome $(1+a)^x$ est donc la même pour toutes les valeurs de x, soit que les termes de ce développement résultent de la multiplication, de la division ou de l'extraction des racines, quelles que soient d'ailleurs ses applications numériques selon la convergence ou la divergence de la série engendrée.
